09-12-16

$Lt(I) = \langle lm(g_1), \dots, lm(g_t) \rangle = \langle lm(f_1), \dots, lm(f_t) \rangle$

Παράδειγμα

$\mathbb{Q}[x,y]$, lex $y > x$

Το σύνολο $f_1 = y^2x + yx + x^2$, $f_2 = y + x^2$, $f_3 = y + x$, $f_4 = y$, $f_5 = x^2$, $f_6 = x$ είναι βάση Grobner. (του $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \rangle$). Είναι ελαχιστική;

— ★ —

$\{f_2, f_6\} = \{y + x^2, x\}$, $\{f_2, f_6\}$ ελαχιστική βάση Grobner

$Lt(I) = Lt(G) = \langle y^2x, y, y, y, x^2, x \rangle = \langle y, x \rangle$

Άλλη ελαχιστική βάση Grobner: $\{f_3, f_6\}$

$\{f_4, f_6\}$

με $\{f_3, f_6\} = \{y + x, x\}$

$\{f_4, f_6\} = \{y, x\}$

η βάση Grobner πάντα ανήκει στο ιδεώδες

$I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \rangle = \langle y^2x + yx + x^2, y + x^2, y + x, y, x^2, x \rangle$
$= \langle y, x \rangle$

SOS

I είναι μονωνυμικό ιδεώδες

με $I = \langle x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_s} \rangle$

$$S(x^{a_i}, x^{a_j}) = \frac{\text{ΕΚΠ}(x^{a_i}, x^{a_j})}{x^{a_i}} x^{a_i} - \frac{\text{ΕΚΠ}(x^{a_i}, x^{a_j})}{x^{a_j}} x^{a_j}$$

$= 0$

οποιοδήποτε σύνολο γεννητόρων είναι βάση Grobner

οποιοδήποτε ελαχιστικό σύνολο γεννητόρων είναι ελαχιστική βάση Grobner

SOS

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Μια άλλη ελαχιστική βάση Grobner είναι
$<y+f(x), x>$ με $f(0)=0$.
για παράδειγμα $<y+3x^{2016}-\frac{3}{2}x^{1204}+5x, x>$
Αν αλλάξω διάταξη θα έχω άλλη βάση Grobner, γιατί η βάση Grobner εξαρτάται από την διάταξη που έχω επιλέξει. □

Ορισμός: Μια βάση Grobner $G=\{g_1, g_2, \dots g_t\}$ λέγεται ανηγμένη βάση Grobner αν για κάθε $i \in \{1, \dots t\}$ ισχύει
$lc(g_i)=1$ και g_i ανάγωγο μόδιο $G-\{g_i\}$ δηλαδή κανένας όρος του g_i δεν διαιρείται από κάποιο $lm(g_j)$ για $i \neq j$.

Παρατήρηση

Κάθε ανηγμένη βάση είναι ελαχιστική

Πχ. $<y+f(x), x>$ με $f(0)=0$ + αρχικοί συντελεστές είναι 1.
Ψάχνω για ανηγμένη βάση Grobner.
Μοναδική ανηγμένη βάση Grobner είναι το $\{y, x\}$, διότι θέλω $f(x)=0$ αναγκαστικά, αφού ο αρχικός του $y+f(x)$ δεν πρέπει να διαιρεί κανέναν όρο του x, πράγμα που ισχύει, ο αρχικός όρος το δεν πρέπει να διαιρεί κανέναν όρο του $y+f(x)$. □

Θεώρημα: Κάθε μη-μηδενικό ιδεώδες I του $k[x_1, \dots x_n]$ (ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια μονωνυμική διάταξη $>$) διαθέτει μοναδική ανηγμένη βάση Grobner ως προς την διάταξη $>$.
Απόδειξη: Έστω $G=\{g_1, g_2, \dots g_t\}$ ελαχιστική βάση.
(διαθέτει) $lm(g_1)=lm(h_1)$
$g_1 \xrightarrow{H_1}_+ h_1$, όπου h_1 είναι ανάγωγο μόδιο $H_1=\{g_2 \dots g_t\}$
$Lt(I)=<lm(g_1), lm(g_2), \dots lm(g_t)>=<lm(h_1), lm(g_2), \dots lm(g_t)>$

$h_1 \in I$ $\{h_1, g_2, \dots g_t\}$ βάση Grobner.

Κανένας όρος του h_1 δεν διαιρείται από κάποιο $lm(g_j)$ $j \neq 1$.

Συνεχίζω την διαδικασία.

$g_2 \xrightarrow{H_2}_+ h_2$, όπου h_2 είναι ανάγωγο ως προς $H_2 = \{h_1, g_3, \dots g_t\}$, $lm(g_2) = lm(h_2)$

$Lt(I) = \langle lm(h_1), lm(h_2), lm(g_3), \dots lm(g_t) \rangle$

$\vdots$

$g_t \xrightarrow{H_t}_+ h_t$, όπου h_t είναι ανάγωγο ως προς $H_t = \{h_1, \dots h_{t-1}\}$

$Lt(I) = \langle lm(h_1)\, lm(h_2), \dots lm(h_t) \rangle$

$h_1, h_2, \dots h_t$ βάση Grobner

ανάγωγη βάση Grobner

(Μοναδικότητα)

Έστω $\{g_1, \dots, g_t\}$ και $\{f_1, \dots f_t\}$ ανάγωγες βάσεις Grobner
$lm(g_1) = lm(f_1), \dots, lm(g_t) = lm(f_t)$
Θα αποδείξω ότι g_i με το f_i είναι ίδια.
Έστω $g_i \neq f_i \Rightarrow g_i - f_i \neq 0$ $g_i \in I$, $f_i \in I \Rightarrow g_i - f_i \in I$
$g_i - f_i \in I$ και G βάση Grobner
$\exists j \in \{1, \dots t\}$ τω $lm(g_j) \mid lm(g_i - f_i)$

$j \neq i \Rightarrow lm(g_j)$ διαιρεί κάποιον όρο του g_i ή του f_i

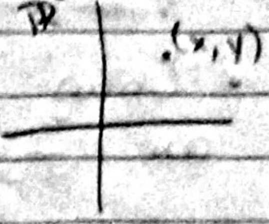
Άτοπο, αφού G είναι ανάγωγη.

Αυτό σημαίνει ότι $g_i = f_i$.

□

Συσχετικός χώρος (affine space)

Καρτεσιανός χώρος



$K^n = \{(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid a_i \in K\}$

K σώμα

$p = (a_1,a_2,\dots,a_n)$ σημείο

$k \subseteq K$

Γεωμετρία

K^n αλγεβρικά σύνολα

$V(f) = \{(a_1,\dots,a_n) \mid f(a_1,\dots,a_n)=0\}$

$V(f_1,f_2,\dots,f_s) = \{(a_1,a_2) \mid f_i(a_1,a_n) = 0 \ \forall i=(1,\dots,s)\}$

$V_k(I) = \{(a_1,\dots,a_n) \mid f(a_1,\dots,a_n)=0 \ \forall f \in I\}$

Άλγεβρα

$k[x_1,\dots,x_n]$

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$f_s(x_1,x_2,\dots,x_n)$

I ιδεώδες του $k[x_1,\dots,x_n]$

$I = \langle f_1,\dots,f_t\rangle$ $\quad f_1=0$

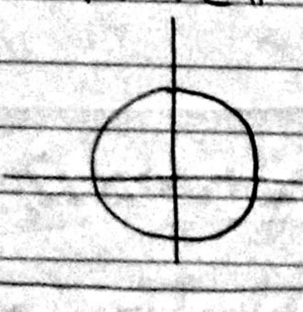
$\quad f_2=0$

$V_k(I) = V_k(f_1,\dots,f_t)$ $\quad f_t=0$

Παράδειγμα

$f = x_1^2+x_2^2-1$

$V(f) \subset \mathbb{R}^2$



$\langle x_1^2+x_2^2-1\rangle$

$V_{\mathbb{R}}(x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^{2016}+7)$

$V_{\mathbb{R}}(x_1^2+x_2^2+1) = \emptyset$

$V_{\mathbb{C}}(x_1^2+x_2^2+1) = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{C} \mid a_1^2+a_2^2+1=0\}$

$\to$ έχει στοιχεία

□

(Nullstellensatz)

Ασθενές Θεώρημα Μηδενικών του Hilbert

- Έστω $I \subset \mathbb{R}[x_1, \dots x_n]$. Ισχύει $V_{\mathbb{C}}(I) = \phi$ αν και μόνο αν $I = \mathbb{R}[x_1, \dots x_n]$. I ιδεώδες

$\boxed{V_{\mathbb{C}}(I) = \phi \text{ αν-ν μόνο αν } I = \langle 1 \rangle}$

Εφαρμογή.

$I = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots x_n] = \langle 1 \rangle$

$f(x_1, \dots x_n) = f(x_1, \dots x_n) 1$

οποιοδήποτε στοιχείο του δακτυλίου πολ/νο με 1 είναι στοιχείο του ιδεώδες.

Βάση Grobner $\{1\}$

Ανάγωγη βάση Grobner $\{1\}$

□

- Έστω I ιδεώδες του $\mathbb{R}[x_1, \dots x_n]$. Ισχύει $V_{\mathbb{C}}(I) = \phi$ αν και μόνο αν το 1 είναι η ανάγωγη βάση Grobner του I, ως προς οποιαδήποτε διάταξη είναι το $\{1\}$

- Το σύστημα $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots f_s = 0$ δεν έχει λύση πάνω από τους μιγαδικούς αν και μόνο αν η ανάγωγη βάση Grobner του ιδεώδους $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ είναι το $\{1\}$.

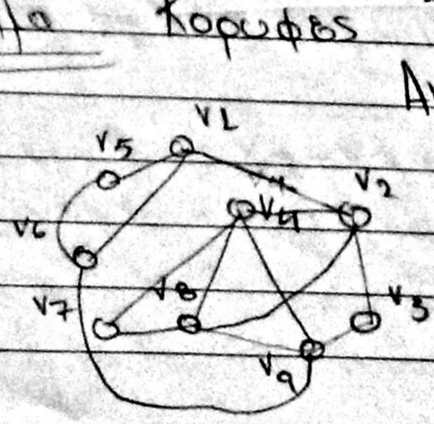
* * *

Χρωματισμός γραφημάτων με n χρώματα

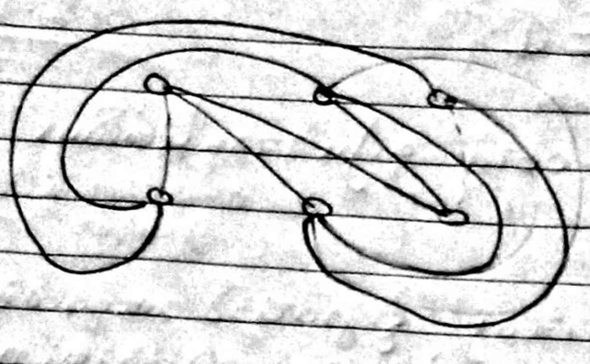
Γράφημα   Κορυφές $\{v_1, v_2, \dots v_s\}$

Ακμές: $\{\{v_i, v_j\}\}$

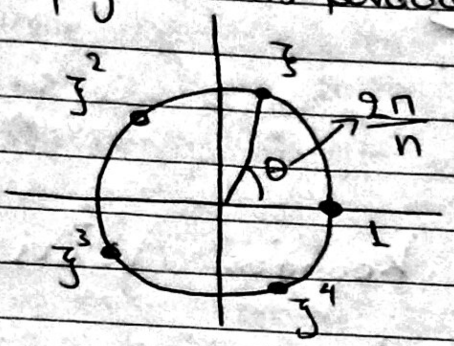
$\{v_1, v_2\}$



$K_{3,3}$



n-οστές ρίζες της μονάδας $x^n - 1 = 0$



$\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{v}\right)$

$\{1, \zeta, \zeta^2, \dots \zeta^{v-1}\}$

$x_i^n - 1$

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$

$\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_s]$ ← τόσες οι μεταβλητές όσες οι κορυφές του γραφήματος.

ΧΡΩΜΑΤΑ $\{1, \zeta, \zeta^2, \dots \zeta^{n-1}\}$ ← οι n-οστές ρίζες της μονάδας

$I = \langle x_i^n - 1 \mid 1 \le i \le s \rangle + \langle x_i^{n-1} + x_i^{n-2}x_j + \dots + x_j^{n-1} \mid \{v_i, v_j\} \in E \rangle$

Έστω ότι κοιτάω την ακμή $\{v_i, v_j\} \in E$ $\quad x_i^n - 1 = 0$

$x_i\ x_j$ $\quad x_j^n - 1 = 0$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow x_i^n - x_j^n = 0 \Rightarrow (x_i - x_j)(x_i^{n-1} + x_i^{n-2}x_j + x_i^{n-3}x_j^2 + \dots + x_i x_j^{n-2} + x_j^{n-1}) = 0$

Αν $x_i^{n-1} + x_i^{n-2}x_j + \dots + x_j^{n-1} = 0$ τότε $x_i \neq x_j$

(Γιατί αν $x_i = x_j \Rightarrow n x_i^{n-1} = 0 \Rightarrow x_i^{n-1} = 0 \Rightarrow x_i = 0$) Άτοπο, γιατί καμία ν-οστή ρίζα της μονάδας δεν είναι το μηδέν.

$x_i \neq x_j$ και $x_i^n = 1$, $x_j^n = 1$ τότε $x_i^{n-1} + \dots + x_j^{n-1} = 0$

Αν θέλουμε να τα δούμε σαν σύστημα

$x_i^n - 1 = 0$, $i \in \{1, \dots s\}$

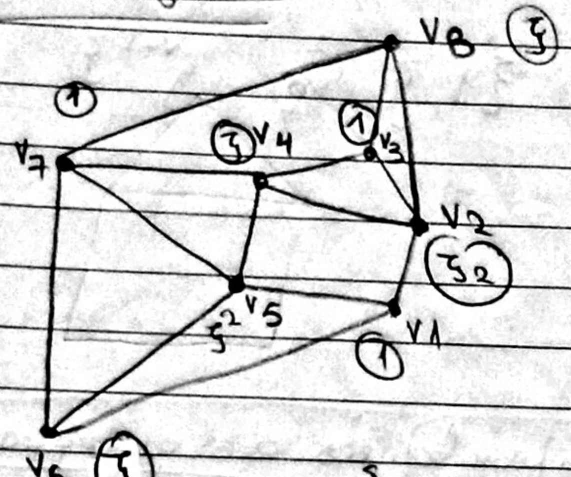
$x_i^{n-1} + x_i^{n-2}x_j + \dots + x_j^{n-1} = 0$ για κάθε ακμή

$(a_1, a_2, \dots a_s) \in V_{\mathbb{C}}(I) \subseteq \mathbb{C}^s$

$a_i^n - 1 = 0 \Rightarrow a_i$ n-οστή ρίζα της μονάδας
με $a_i \in \{1, \zeta, \dots \zeta^{n-1}\}$

Αν $\{v_i, v_j\}$ ακμή τότε $a_i \neq a_j$ {γιατί διαφορετικά $a_i = a_j$
$\longrightarrow n a_i^{n-1} = 0 \Rightarrow a_i = 0$ Άτοπο, αφού a_i n-οστή ρίζα της μονάδας }

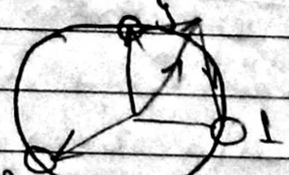
Παράδειγμα



Κορυφές $V = \{v_1, \dots v_8\}$

Ακμές $E = \{ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}$
$\{v_2, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_8\}$
$\{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_8, v_7\}$
$\{v_7, v_4\}, \{v_7, v_5\}, \{v_7, v_6\},$
$\{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\} \}$

$\{1, \zeta, \zeta^2\}$



14

$I = \langle x_1^3 - 1, x_2^3 - 1, \dots x_8^3 - 1, x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, x_1^2 + x_1x_2 + x_5^2, \dots$
$\dots x_5^2 + x_5x_6 + x_6^2 \}$

Υπολογίζουμε ανηγμένη βάση Grobner, lex $x_1 > x_2 > \dots > x_8$

$G = \{x_1 - x_7, x_2 + x_7 + x_8, x_3 - x_7, x_4 - x_8, x_5 + x_7 + x_8, x_6 - x_8,$
$x_7^2 + x_7x_8 + x_8^2, x_8^3 - 1\} \neq 1$. Άρα, χρωματίζεται με 3 χρώματα.

← για τα χρώματα

$x_6 - x_8$, η x_6 αναγκαστικά θα βαφτεί με το ίδιο χρώμα με το x^8

$x_5 + x_7 + x_8 = 0 \implies$ το x_7 είναι 1 το x_8 $\zeta \Rightarrow x_5 = \zeta^2$

$x_4 - x_8$, η x_4 αναγκαστικά θα βαφτεί με το ίδιο χρώμα με την x_8

$x_3 - x_7$, $x_1 - x_7$, το x_3 και το x_7 θα βαφτούν με το ίδιο χρώμα με το x^7

$x_2 + x_7 + x_8 = 0$, το $x_7 = 1$ και το $x_8 = \zeta \Rightarrow x_2 = \zeta^2$

Dave Bayer (1978) έλαβε του διδακτορικού του στο Harvard. Ο καθηγητής του Hironaka

Stilmann - Bayer το πρώτο πρόγραμμα υπολογισμού με βάση Gorbner και το ονόμασαν Macaulay

"Beautifull Mind" η ταινία όπου έπαιξε και κρύβεται πίσω απ' αυτήν ([illegible])

Θα μπει στις εξετάσεις !